ifous FOKUSERAR

MATEMATIK

Lämna över och ta emot – elevers matematikkunnande när de börjar gymnasieskolan

Anette Jahnke & Verner Gerholm

Ifous rapportserie 2017:1
Stockholm, februari 2017
ISBN: 978-91-982841-4-0

Författare: Anette Jahnke & Verner Gerholm
Grafisk form & produktion: Per Isaksson
Ansvarig utgivare: Ifous

Fri kopieringsrätt i ickekommersiellt syfte för kompetensutveckling eller undervisning i skolan och förskolan under förutsättning att författarens namn och artikelns titel anges, samt källa. I övrigt gäller copyright för författarna och Ifous AB gemensamt.

INNEHÅLL

SAMMANFATTNING

Eleverna rör sig genom en matematikutbildning som löper från förskola till gymnasieskola. De flesta som på olika sätt ansvarar för matematikutbildningens genomförande och kvalitet är däremot verksamma i en och samma skolform. Lärarna har ansvar för att planera, genomföra och följa upp sin matematikundervisning. Men det är skolchefer och rektorer som ansvarar för att planera, genomföra och följa upp utvecklingsarbete och lärares kompetensutveckling – liksom för samarbete mellan skolformer. Att åstadkomma en kontinuitet – en röd tråd- i elevernas matematikutbildning faller således på alla nivåer i organisationen.

Syftet med Ifous *fokuserar på matematik* är att stimulera till fortsatt kollegialt arbete, inte enbart mellan lärare från en skolform utan även mellan skolformer, för att utveckla kvaliteten på hela den matematikutbildning som våra elever genomgår. Syftet är därför också att bidra med underlag för rektorers och skolchefers beslut när det gäller planering och genomförande av skolors utvecklingsarbete, samverkan mellan skolor och lärares kompetensutveckling.

Ifous *fokuserar på matematik* tar avstamp i det mest konkreta som finns i en matematiklärares vardag – matematikuppgifterna. Uppgifter är hämtade från ett diagnostiskt prov som har använts under sex år och genomförts av 30 000 elever de första dagarna på gymnasiet. Data har använts från de externa årliga uppföljningar som gjorts av provets resultat. Samma prov har getts alla år, och elevresultaten har i princip varit konstanta mellan 2011 och 2015 med ett medel/medianvärde på mellan 21–23 poäng av 43. En viss förbättring har skett 2016 då medel/medianvärde steg till 24 poäng. Uppgifterna har valts utifrån att lösningsfrekvensen i relation till det matematikdidaktiska innehållet är av särskilt intresse för att förbättra övergången mellan grundskolans och gymnasieskolans matematikutbildning.

Den matematikdidaktiska analysen, gjord utifrån forskning och beprövad erfarenhet, leder till fyra slutsatser med betydelse för både undervisning och organisation av utbildning i både grundskola och gymnasieskola:

För det första, är det viktigt att *arbeta med att kombinera begrepp från olika områden*. Uppgifter med en lägre lösningsfrekvens tenderar att involvera begrepp från olika områden av det centrala innehållet i grundskolan. I analysen av uppgifterna finns dessutom en koppling mellan begreppsförståelse och proceduranvändning, Där begreppsförståelsen brister blir det svårt för eleverna att tillämpa procedurerna då denna tillämpning är beroende av memorering och inte av resonemang.

För det andra, är det viktigt att *arbeta med att använda och kommunicera resonemang*. I flera av uppgifterna med lägre lösningsfrekvens finns det möjlighet till att lösa uppgiften lättare genom att resonera än att tillämpa en procedur. I en del uppgifter krävs det att eleverna inte bara resonerar för sig själva och kan ange ett korrekt svar utan att de också kan redogöra för sitt resonemang skriftligt.

För det tredje, är det viktigt att *arbeta med att lösa problem*. Uppgifter som hade som syfte att pröva förmågan att lösa problem hade lägre lösningsfrekvens. Vikten av att som elev uppleva och lära sig hantera problemlösningssituationer där man inte per automatik vet hur man ska lösa uppgiften kan inte nog poängteras.

För det fjärde, är det viktigt att *arbeta med att upprätthålla matematikkunnandet*. Samtidigt som det är viktigt att tidigt introducera sådant vi vet tar tid att lära sig är det också viktigt med kontinuitet i att utöva matematik. De fjorton uppgifternas innehåll kan kopplas inte bara till grundskolans kursplan utan även till gymnasieskolans ämnesplan. Med andra ord, alla begrepp, metoder och förmågor utgör också ett innehåll i gymnasieskolans matematik. Det finns alltså en kontinuitet att uppmärksamma i elevens matematikutbildning.

Ett matematikkunnande kan betraktas som en praktisk kunskap som erövras och upprätthålls genom att ha tillgång till aktuella erfarenheter som används, diskuteras och reflekteras över tillsammans med andra. Ett sommarlov kan innebära att eleverna tappar en del av denna praktiska kunskap som de utvecklat i grundskolan. Vad skulle hända om ett diagnostiskt prov genomfördes till exempel en månad in på terminen, i stället för direkt vid starten? Då har eleverna fått chansen att i praktiken återuppta och återkalla sitt matematikkunnande. Det kan vara en intressant tanke att leka med.

Rapportens analys och slutsatser ska ses som starten på en diskussion som behöver fördjupas och breddas utifrån lokala behov. Som stöd för en sådan dialog ingår i rapporten diskussionsfrågor med fokus på både samtal och handling riktade till lärare på grundskola respektive gymnasium samt rektorer och skolchefer. Dessutom ges en mall för strukturerade samtal, en sammanställning av de fjorton uppgifterna samt förslag på forskningslitteratur. Rapportens stöd för samtal kan användas för att planera såväl undervisningens genomförande som samarbetsformer, eventuella behov av utvecklingsarbete eller kompetensutveckling.

Rapporten är framtagen av Ifous tillsammans med sina fem partner Stockholms stad, AcadeMedia, Nacka kommun, Helsingborgs stad och Kunskapsskolan. Rapporten är författad av Anette Jahnke, projektledare för Ifous *fokuserar* och Verner Gerholm, forskarutbildad matematiklärare, med stöd av en referensgrupp av forskare och verksamma matematiklärare.

TILL LÄSAREN

Varje elev som lämnar grundskolan ska enligt läroplanen kunna ”använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet” (Skolverket, 2011a, s. 13). I gymnasieskolans läroplan anges att läraren ska ”utgå från den enskilda elevens behov, förutsättningar, erfarenheter och tänkande” och organisera och genomföra arbetet så att eleven ”utvecklas efter sina egna förutsättningar” (Skolverket, 2011b, s. 10–11).

Men vilka kunskaper kommer att bestå efter att matematikläraren skickat iväg sina elever på sommarlov efter avslutad grundskola? Vilka kunskaper har eleverna när de står på tröskeln till matematiklärarens klassrum på gymnasiet? Vilka matematiska begrepp och metoder behärskar de och vilka förmågor kan de nyttja?

I denna rapport analyseras fjorton matematikuppgifter. Uppgifterna och elevernas lösningsfrekvens kommer från ett diagnostiskt prov som använts under sex år och genomförts av närmare 30 000 elever de första tio dagarna på gymnasiet.

Analysen görs utifrån ett matematikdidaktiskt perspektiv, relateras till forskning och beprövad erfarenhet samt till styrdokumenten för grundskola och gymnasieskola. Analysen ska ses som starten på en diskussion och i slutet av rapporten ges förslag på ytterligare forskningsartiklar med relevans för uppgifternas innehåll.

Syftet med denna rapport är att bidra till fortsatt kollegialt arbete, inte enbart mellan lärare från en skolform utan även mellan skolformer för att utveckla kvaliteten på hela den matematikutbildning som våra elever genomgår. Vilka begrepp och metoder kommer förmodligen våra elever på grundskolan ha svårt att behärska efter ett sommarlov? Vad medför det för vår planering, vårt genomförande och vår uppföljning av undervisningen på grundskolan? Eller, för gymnasielärarna, vad kan vi förvänta oss att eleverna behärskar eller inte och, utifrån detta, hur kan vi lägga upp undervisningen i början av terminen på bästa sätt?

Men utvecklingen av undervisningens och utbildningens kvalitet är inte enbart lärares ansvar, utan även rektorers och skolhuvudmäns. Kunskapsmålet i grundskolans läroplan citerad ovan är inte riktat till enbart läraren, utan ”*skolan* ska ansvara för att varje elev efter avslutad grundskola” (Skolverket, 2011a, s. 13, vår kursivering) har tillräckliga kunskaper för vidare studier. Under rubriken ”Övergång och samverkan” i läroplanen anges att grundskolan ska ”sträva efter att nå ett förtroendefullt samarbete” med gymnasiala utbildningar för ”att stödja elevernas utveckling och lärande i ett långsiktigt perspektiv” (ibid., s. 16). Gymnasieskolan ska ha ”nära samverkan med de obligatoriska skolformerna” för att eleverna ska få en utbildning av hög kvalitet enligt gymnasieskolans läroplan (Skolverket, 2011b, s. 13).

För gymnasieskola har rektor ett speciellt ansvar för att ”lärarna anpassar undervisningens uppläggning, innehåll och arbetsformer” (Skolverket, 2011b, s. 16) efter elevernas skiftande förutsättningar. I grundskolans läroplan anges att rektor också har ansvar för att ”verksamheten inriktas” mot de nationella målen och i gymnasieskolan har rektor ansvar för att ”utveckla utbildningen” i förhållande till målen i läroplanen (Skolverket, 2011a, s. 18; 2011b, s. 16). Rektor har därmed ansvar att driva utvecklingsarbete när så krävs.

Samarbete mellan skolformer kräver ett

aktivt ledarskap både från rektorer och från förvaltning på huvudmannanivå. Dessutom ansvarar rektor på såväl grundskolan som gymnasieskolan för att "personalen får den kompetensutveckling som krävs för att de professionellt ska kunna utföra sina uppgifter" (Skolverket, 2011a, s. 19; 2011b, s. 16). I Skolverkets förslag på justerade läroplaner (med anledning av att digital kompetens ska förstärkas) görs tillägget att lärare "kontinuerligt ges möjligheter att dela med sig av sin kunskap och att lära av varandra för att utveckla utbildningen" (Skolverket, 2016a, s. 10).

Utifrån detta är syftet med rapporten också att bidra med underlag för rektorers och skolchefers beslut när det gäller planering och genomförande av skolors utvecklingsarbete, samverkan mellan skolor och lärares kompetensutveckling.

I studier över kompetensutveckling av lärare har man visat att lärare utvecklar nya kunskaper genom olika sekvenser av händelser (Clark & Hollingsworth, 2002). Ofta tänker vi linjärt, att via någon form av extern input, till exempel läsandet av en text, ändrar vi vår personliga kunskap och utför nya handlingar i vår praktik vilket ger nya resultat. Clark & Hollingsworth lyfter fram att lärandet inte alltid sker linjärt och att vi lär olika. Istället handlar det om ett flöde mellan extern input, prövande i sin praktik samt reflektioner och handlingar utifrån prövandets konsekvenser. Då kan vi bilda ny kunskap. Det som binder ihop de fyra områdena extern input, prövandet i praktiken, uppmärksammade konsekvenser och ny kunskap är förmågan att reflektera och agera utifrån upplevelser i sin praktik.

I denna rapport ingår därför diskussionsfrågor som stöd för att pröva väckta tankar i sin praktik eller i samtal med kollegor, inom eller mellan skolformer men även mellan olika professioner så som lärare, rektorer och skolchefer. Frågorna är av två typer. Den första syftar till att fördjupa förståelsen av läsarens erfarenheter genom att dela exempel från sin praktik med andra och analysera dessa med hjälp av rapportens innehåll. Den andra typen av frågor syftar till det omvända, att fördjupa förståelsen av rapportens innehåll genom att läsaren i samtal konkretiserar den med egna exempel på hur hen arbetar eller skulle vilja arbeta.

Som yrkesverksamma bildar vi genom att arbeta i en viss profession en praktisk kunskap eller klokhet som handlar om att vi i den unika situationen kan urskilja det väsentliga och med omdöme agera rimligt. Den praktiska kunskapen är ofta tyst och omedveten. En välutvecklad praktisk kunskap är avgörande för att vi ska nå skicklighet i våra yrken. Men den praktiska kunskapen behöver ständigt upprätthållas genom reflektion och för att kunna delas behöver den också verbaliseras. Detta kan ske genom att den utmanas till exempel genom ny teknik, nya forskningsresultat, nya kollegor eller – genom att ta del av den kunskap som kan utvinnas ur data från elevresultaten av ett diagnosiskt prov genomfört av 30 000 elever.

FÖRFATTARNA

Denna rapport har tagits fram i samarbete mellan Anette Jahnke, projektledare för *Ifous fokuserar på matematik*, dr. i professionspraxis och fil. lic. i matematik och Verner Gerholm, fil. lic. i matematikdidaktik och gymnasielärare.

En referensgrupp av forskare har bistått med värdefulla kommentarer under framtagningen av rapporten. Forskarna är: Attila Szabo, FoU-samordnare, fil. lic. i matematikdidaktik och doktorand vid Stockholms universitet; Andreia Balan, fil. dr. i pedagogik och verksam vid Skol- och fritidsförvaltningen i Helsingborg; professor Paul Andrews vid Stockholms universitet.

En referensgrupp av verksamma lärare från Ifous partner AcadeMedia, Helsingborgs stad, Stockholms stad, Kunskapsskolan och Nacka kommun har också bistått med värdefulla kommentarer.

OM PROVET

År 2011 började Stockholms stad att utveckla och använda ett diagnostiskt prov i matematik för alla nya gymnasieelever med syftet att bland annat vara en del i den formativa bedömningen och ge stöd åt gymnasielärarens planering av undervisningen. Syftet var också att utvärdera grundskolans betygsättning. Med tiden har även andra huvudmän, till exempel AcadeMedia, valt att införa provet i sina gymnasieskolor.

Alla elever med godkänt betyg i matematik från grundskolan och som antagits till ett gymnasieprogram i Stockholms stad har genomfört samma prov under 2011–2016 med undantag för elever som läser introduktionsprogrammet. Provets innehåll är utformat utifrån vad elever bör kunna efter avklarad grundskola. Uppgifterna är indelade i fem områden som bedömts vara relevanta för starten vid gymnasiet, det vill säga: Taluppfattning och aritmetik; Procent; Formler, ekvationer och tolkning av data i diagram; Geometri samt Problemlösning.

Provet ger utrymme för att uppvisa kvaliteter på betygsnivåerna E–C men inte på B- och A-nivå. Eleverna informeras om att deras resultat på provet inte påverkar deras kommande betyg på gymnasiet och att provresultatet endast tjänar ett diagnostiskt syfte för undervisande lärare. Provet rättas av undervisande lärare med stöd av bedömningsanvisningar framtagna av Stockholms stads utbildningsförvaltning. Lärarna rapporterar in för varje elev antal poäng per uppgift. Eleverna får inte återkoppling i form av provresultat i förhållande till kunskapsnivåerna E–C. Provet genomförs av eleverna under 90 minuter utan tillgång till digitala verktyg såsom miniräknare. Provet består av 29 uppgifter och det maximala antalet poäng på provet är 43. Resultatet för elevgruppen som helhet har varit relativt konstant under 2011–2015 med både ett medelvärde och en median mellan 21 och 23 poäng. Resultatet från 2016 visar på en förbättring med både medelvärde och median på 24 poäng.

Vid det här laget finns ett omfångsrikt datamaterial insamlat. Den generella externa analysen som gjorts varje år ger information om hur stor andel av eleverna som klarar respektive uppgift och gör jämförelser dels mellan gymnasieskolor och dels mellan de grundskolor eleverna kommer från (Stockholms stads utbildningsförvaltning, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016a).

I denna rapport fokuserar vi på att använda insamlade data för att på goda grunder kunna synliggöra exempel på matematikinnehåll och matematiska förmågor som eleverna har lätt respektive svårt för när de börjar gymnasieskolan. På de flesta uppgifter har lösningsfrekvensen varit i stort sett konstant under sex år men det finns även uppgifter där kunskaperna har förbättrats.

Uppgifterna som presenteras är valda framför allt på grund av att lösningsfrekvensen i relation till det matematiska innehållet gör dem särskilt intressanta och viktiga. Eftersom provet är sekretessbelagt presenteras alternativa uppgifter med likvärdigt matematiskt innehåll. Procentsatserna som presenteras avser elever som till fullo löst uppgiften och fått alla poäng som gick att få på uppgiften. På de flesta uppgifter ges bara 1 poäng, men på några uppgifter ges 2 eller 3 poäng. I de fall det var möjligt att få fler poäng än 1 kommenteras det i texten. Det delas inte ut halva poäng på uppgifterna.

ANALYS AV MATEMATIKUPPGIFTER

Matematikkunnande i såväl förskolans som grund- och gymnasieskolans styrdokument beskrivs genom att dels ange olika ämnesspecifika förmågor, och dels genom att ange ett stoff, ett innehåll. Bakgrunden till denna uppdelning kan spåras tillbaka till den matematikdidaktiska forskningens ambition att stärka elevers lärande i matematik, till 1990-talets kunskapsbegrepp som ligger till grund för våra läroplaner samt till 2000-talets strävan att finna ett mer funktionellt språk för att förmedla ett matematikkunnande i en text, en kursplan (Jahnke, 2016).

Både förmågor och innehåll kommer att synliggöras i de fjorton uppgifter som analyseras. Uppgifterna är sorterade under de rubriker som använts i provet: Taluppfattning och aritmetik; Procent; Formler, ekvationer och tolkning av data i diagram; Geometri samt Problemlösning. Rubrikerna har kopplingar till styrdokumentens centrala innehåll för såväl grundskola som gymnasieskola. För varje uppgift anges mellan vilka värden lösningsfrekvensen varierat under perioden 2011–2016. Om en förbättring har skett över tid anges detta. Annars har lösningsfrekvensen i princip varit konstant. Inga uppgifter har tagits med från området Procent.

TALUPPFATTNING OCH ARITMETIK

Inom området Taluppfattning och aritmetik gavs elva uppgifter på provet och fyra uppgifter har valts ut som intressanta. I de två första uppgifterna är lösningsfrekvensen i princip konstant över tid medan lösningsfrekvensen har förbättrats för de två sista uppgifterna.

Uppgift 1. Ett av följande tal är större än 7/13. Vilket är talet?

$\frac{7}{15}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{6}{11}$

Lösningsfrekvens: 68–72 %. Genomsnitt 71 %. Max 1 poäng.

Att lära sig hantera och använda tal uttryckta i bråkform är inkluderat i både grund- och gymnasieskolans styrdokument. Till exempel ska eleverna i årskurs 1–3 arbeta med hur ”delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal” och i gymnasieskolans första kurser ska eleverna arbeta med metoder för beräkningar med reella tal skrivna på olika former, till exempel bråkform (Skolverket, 2011a, s. 63, 2011b).

I uppgift 1 handlar det om att jämföra storleken hos två bråk vilket ingår som en viktig del av elevers kunskapsutveckling i grundskolan och är vanligt förekommande i läromedel för både grundskolan och gymnasiet.

I boken *Förstå och använda tal* (McIntosh, 2008) listas fyra grundläggande aspekter av bråk som alla elever måste förstå för att kunna gå vidare med bråkräkning. Det handlar om att: 1) alla delarna måste vara lika stora; 2) nämnaren visar hur många delar en hel har delats i; 3) ju större nämnaren är, desto mindre är bråket om täljaren är lika; 4) täljaren visar hur många delar av helheten som bråket utgör.[1]

Det traditionella sättet att jämföra två bråk som lärs ut i skolan är att göra nämnarna lika. Det är visserligen en metod som alltid fungerar, men den är inte alltid mest effektiv och gör ibland uppgifterna svårare än nödvändigt (McIntosh, 2008). En sådan ingång till uppgift 1 gör att den vid en första anblick kan uppfattas som svår. Skillnaderna mellan bråkens storlek är liten och det är inte enkelt att skriva bråken med gemensam nämnare[2] (få elever beräknar $13 \cdot 15 = 195$ utan räknare).

Men studeras uppgiften lite noggrannare ser man att den är enklare än så. Uppgiften kan lösas genom att relatera de olika bråken till talet 1/2. Det är bara talet 6/11 som är större än 1/2 och alltså måste det vara svaret.

Elever som endast behärskar metoden att skriva om bråken till gemensam nämnare kommer att få ett betydligt svårare problem än de som resonerar genom att sätta bråken i relation till 1/2 och använda uteslutningsmetoden. De elever som använder det senare angreppsättet kommer med stor sannolikhet lyckas lösa uppgiften och visar en djupare begreppsförståelse när det gäller bråk. Därmed kan uppgiften användas för att identifiera elever som har en djupare begreppsförståelse när det gäller bråk från de elever som löser uppgifter kring bråk genom att utföra procedurer.

Trots att uppgiften löses med relativt enkla resonemang är det minst tre av tio elever som inte lyckas lösa uppgiften korrekt. Dessutom kan några korrekta svar vara chansningar. Några tänkbara orsaker kan vara:

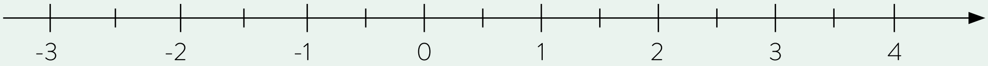
1. eleven behärskar inte någon metod för att jämföra bråktal och ger upp
2. eleven behärskar metoden att göra bråken liknämniga, men finner uppgiften för svår och ger upp
3. eleven försöker resonera sig fram, men lyckas inte.

I förklaringarna 1) och 2) är elevens *tro på den egna förmågan* att klara av uppgiften en minst lika viktig aspekt som elevens matematikkunskaper. ”Tron på den egna förmågan” eller ”self-efficacy” är ett begrepp skapat av psykologen Albert Bandura (1977). Tron på den egna förmågan varierar med uppgiftens svårighetsgrad, vilka hjälpmedel som får användas och hur lång tid som ges för uppgiften (Skaalvik & Skaalvik, 2015). Elever som inte tror på sin egen förmåga att resonera matematiskt är tvungna att lita på sin förmåga att genomföra metoder och procedurer, och om dessa inte räcker ger man upp.

1 Kapitlet om bråk finns också som en del i Matematiklyftets material, se modul Taluppfattning och tals användning, https://larportalen.skolverket.se/

2 Genom att studera uppgift 3 nedan kan vi också se att endast hälften av provdeltagarna kan göra två bråk liknämniga.

Uppgift 2. Placera ut talen √5 och π på tallinjen



Lösningsfrekvens: 24–30%. Genomsnitt 27 %. Max 2 poäng.

Uppgift 2 visade sig ha en av de lägsta lösningsfrekvenserna på provet 2015. Det är egentligen en fråga om två separata uppgifter. I statistiken framkommer inte om eleverna kunde placera ut ett av talen eller inget av dem. Det vi vet är att 27 % kunde sätta ut båda talen på en tallinje. Det är troligt att elever generellt sätt har lättare att placera π än vad de har att placera √5 på en tallinje. Det vill säga de elever som kan placera √5 på en tallinje placerar troligtvis också ut π korrekt.

Ur ett matematikdidaktiskt perspektiv finns det också viktiga skillnader mellan talen √5 och π. Talet π i detta sammanhang kan betraktas nästan som en glosa $\pi \approx 3{,}14$. De flesta elever vet att π ligger nära 3 eftersom det ofta används som närmevärde för π i läromedel. De elever som förstått begreppet ”kvadratrot” kan resonera sig fram till ett approximativt värde på √5, med andra ord, ett positivt tal[3] som multiplicerat med sig själv blir 5. Elever som resonerar att $\sqrt{4} = 2$ och $\sqrt{9} = 3$ förstår att $2 < \sqrt{5} < 3$. Dessutom är 5 närmare 4 än 9, därmed är √5 närmare 2 än 3 på tallinjen.

Man har uppmärksammat att många elever har svårt för kvadratrötter och i en undersökning av 1 400 elever i årskurs 8 fann man att endast 30 % av eleverna kunde besvara uppgiften $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ (Kilborn & Karlsson, 2013). Anledningen som artikelförfattarna presenterar är att kvadratrötter introduceras alldeles för sent i grundskolan, vilket ställer till problem i gymnasiet. Många lärare förknippar kvadratrötter med irrationella tal och anger det som skäl till att vänta med att introducera begreppet.

En alternativ didaktik, som förespråkas av Kilborn och Karlsson, är att introducera begreppet tidigt, men i ett begränsat talområde. Även små barn kan förstå kvadratrötter om läraren presenterar det konkret som sidan i en kvadrat. Detta ger eleverna ett första möte med kvadratrötter, vilket blir kunskap att bygga vidare på när begreppet senare ges en mer formell innebörd.

Det som är gemensamt i uppgifterna 1 och 2 är att de löses enklast genom att genomföra ett resonemang som grundar sig i elevens begreppsförståelse av bråk respektive kvadratrot. Det är viktigt att som lärare ge eleverna förutsättningar för att kontinuerligt utveckla en förmåga att resonera matematiskt såväl i grundskola som i gymnasieskola.

3 I Sverige används √5 för att beteckna det positiva tal som multiplicerat med sig själv blir 5 (Kiselman & Mouwitz, 2008). Men i andra länder kan √5 stå för en av lösningarna till ekvationen $x^2=5$. Detta medför att elever kan ha markerat två värden på tallinjen.

Uppgift 3. Bestäm en gemensam nämnare till 3/10 och 1/4

Lösningsfrekvensen har förbättrats successivt från 39 % 2011 till 52 % 2016. Genomsnitt 44 %. Max 1 poäng.

Bråkräkning är en förutsättning för många områden i skolans matematik och är därför en viktig del av undervisningen. Bråken återfinns i formler, ekvationer, ekvationssystem, sannolikhetsberäkningar och naturligtvis inom algebran. Elever som behärskar grundläggande bråkräkning när de lämnar grundskolan kommer att få det betydligt enklare att klara av gymnasiets kurser i matematik. Dock uppfattas bråkräkning ofta som svårt och det kan vara frestande för både lärare och elever att undvika bråkräkningen och istället använda sig av tal på decimalform. På kort sikt kan eleverna kanske lösa fler problem med hjälp av tal på decimalform, men bristande kunskaper om bråkräkning kommer ofelbart att leda till misslyckande på längre sikt – om inte i grundskolan så på gymnasiet.

När det gäller lösningsfrekvensen på uppgift 3 har den ökat med tretton procentenheter på sex år, vilket motsvarar en ökning på 33 %. Det kan vara värt att notera att bråkräkning inte var explicit med i grundskolans kursplaner som infördes 1994 respektive 2000 utan återinfördes i och med kursplanen 2011.

Trots förbättringen har fortfarande hälften av eleverna svårt att finna en gemensam nämnare till två bråk. Eleverna visar brister i både begreppsförståelse och procedurförmåga.

För att bestämma en gemensam nämnare måste eleven förstå att två olika bråkuttryck kan beteckna samma tal. Det kan finnas elever som tycker detta verkar märkligt när de tänker på en konkret situation. Till exempel är det inte samma sak i praktiken då 28 personer delar på 14 kakor som att sex personer delar på tre, även om personerna får en halv kaka i båda fallen (McIntosh, 2008). Men vanligare är att eleven bara har lärt sig en procedur utan att förstå syftet med att göra bråk liknämniga.

En av de vanligaste missuppfattningarna när det gäller bråk är att eleverna inte förstår skillnaden på att förlänga ett bråk och på att multiplicera ett bråk med ett heltal. Det är därför viktigt att eleverna redan i de lägre årskurserna får arbeta konkret med att samma tal kan uttryckas på bråkform på olika sätt eftersom det lägger grunden för senare årskurser och ökar förutsättningarna för mer avancerad bråkräkning som till exempel i nästa uppgift.

Uppgift 4. Beräkna och förkorta resultatet så långt som möjligt

a) $6 \cdot \frac{2}{3}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}$ c) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

Lösningsfrekvens: 4a 38–44 %, 4b 15–22 %, 4c 30–40 %. Max 1 poäng/uppgift. Lösningsfrekvensen har ökat från 2011 till 2016 för alla tre deluppgifterna, t.ex. för 4b från 15 % till 22 %.

Lösningsfrekvensen av uppgifterna visar att elever, trots förbättringarna sedan 2011, har svårt för att räkna med bråk. Det kan vara intressant att jämföra med resultaten på TIMSS 2015, där 26 % av eleverna i årskurs 8 når hög och avancerad nivå. Dessa nivåer innebär att de kan använda olika typer av tal och räknesätt (Skolverket, 2016c).

Uppgift 4b var den uppgift som hade lägst lösningsfrekvens av alla på provet. Uppgifter med bråk, där det förkommer bråk i både nämnare och täljare, behandlas av många läromedel som överkurs i grundskolan, vilket kan förklara den låga lösningsfrekvensen.

Ett sätt att introducera dubbelbråk relativt tidigt i årskurserna är att använda så kallad innehållsdivision. Dubbelbråket (2/3)/(1/6) ges då den mer konkreta innebörden ”hur många sjättedelar får det plats i två tredjedelar”. Elever som kan visualisera tredjedelar och sjättedelar kommer kunna beräkna enkla dubbelbråk. Denna tolkning av division av bråk gör det också enklare för eleverna att förstå division med tal på decimalform mellan 0 och 1. Tolkningen av 4/0,1 = 40, blir då att talet 4 innehåller 40 stycken 0,1.

Lösningsfrekvensen i uppgiften 4a är kanske mer förvånande eftersom det handlar om en multiplikation av typen upprepad addition. Enligt en undersökning som genomfördes mellan åren 2008 och 2012 klarade 71 % av eleverna i årskurs 6 att lösa uppgiften 2 · 2/5 (Kilborn, 2014). Detta skulle kunna tyda på att även om många elever förstår och vet hur de ska utföra beräkningen så fastnar de på ”förkorta så långt som möjligt”. En annan möjlig svårighet kan vara att elever tolkar 6 · 2/3 som ett tal i blandad form, det vill säga som sex hela och två tredjedelar.

Det är intressant att jämföra uppgift 4c med uppgift 3. Innehållet är mycket likt och det går att se samma positiva kunskapstrend i båda uppgifterna. Trots detta skilde det tolv procentenheter mellan uppgifternas lösningsfrekvens år 2016. En möjlig förklaring är att eleverna inte förstår att liknämnighet är en förutsättning för att utföra subtraktionen. Att en majoritet av eleverna som lämnar nionde årskurs inte kan subtrahera bråk med olika nämnare är inget nytt fenomen. I en undersökning som gjordes mellan 2008 och 2012 löste 37 % av eleverna i årskurs 9 en liknande uppgift. Motsvarande resultat för addition var i undersökningen 44 % (Kilborn, 2014).

Sammanfattningsvis grundar sig ett misslyckande med uppgift 4 på brister i både begreppsförståelse och procedurförmåga.

FORMLER, EKVATIONER OCH TOLKNING AV DATA I DIAGRAM

Inom området gavs fem uppgifter på provet. Fyra uppgifter har valts ut som intressanta inom området och lösningsfrekvensen har i princip varit konstant över tid. De tre första handlar om ekvationer och den fjärde om att tolka data i diagram.

Uppgift 5. Lös ekvationen $4x + 5 = 21$

Lösningsfrekvens: 84–86 %. Genomsnitt 85 %. Max 1 poäng.

Uppgift 6. Vilket av följande x-värden är en lösning till ekvationen $77 + 4x = 65$? Ringa in ditt svar.

$x = 3$ $\qquad$ $x = 5$ $\qquad$ $x = -3$ $\qquad$ $x = -5$

Lösningsfrekvens: 76–77 %. Genomsnitt 77 %. Max 1 poäng.

Uppgift 7. Lös ekvationen $7x - 5 = x + 4x - 5$

Lösningsfrekvens: 30–35%. Genomsnitt 33 %. Max 1 poäng. Förbättrats från 30 % till 35 % 2015–2016.

Algebra återfinns som ett centralt innehåll från årskurs 1–3 och genom hela grundskolan. Till exempel ska eleverna i årskurs 4–6 arbeta med ”situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol” och med metoder ”för enkel ekvationslösning” (Skolverket, 2011a, s. 63–64). På gymnasieskolans första matematikkurser ingår algebra i det centrala innehållet i alla de tre inledande kurserna 1a–c, fast på olika sätt. På yrkesprogrammen ska eleverna arbeta med formler och metoder för att lösa linjära ekvationer relevanta för karaktärsämnena, medan eleverna på högskoleförberedande program till exempel ska arbeta med algebraiska och grafiska metoder för att lösa både linjära ekvationer och potensekvationer (Skolverket, 2011b).

Uppgifterna 5–7 är intressanta att betrakta ur ett matematikdidaktiskt perspektiv av flera skäl. Uppgifterna är alla av standardkaraktär och ger därför en god förståelse för vilka ekvationstyper elever kan när de börjar gymnasiet. Det finns dock skillnader mellan ekvationerna och lösningsfrekvenserna är olika, där uppgift 7 har en mycket lägre lösningsfrekvens än de övriga.

Forskaren Kücheman (1981) presenterar i sin avhandling sex olika elevuppfattningar om bokstavssymboler, vilka finns beskrivna både i Häggströms artikel *Tidigare algebra* (1994) och i

Matematiklyftets modul om algebra (Olteanu, 2016). De sex elevuppfattningarna är:

1. Bokstaven tilldelas ett värde
2. Bokstäverna används inte alls
3. Bokstäverna används som förkortning eller som objekt
4. Bokstaven används som ett specifikt, men okänt, tal
5. Bokstaven används som ett godtyckligt tal
6. Bokstaven används som en variabel

De tre första uppfattningarna om bokstavssymbolerna representerar en lägre form av förståelse (Olteanu, 2016). Elever med dessa uppfattningar kan visserligen lösa vissa algebrauppgifter, men undviker egentligt algebraiskt tänkande eller att resonera med hjälp av algebra. Det finns också mycket som tyder på att många elever har en mycket förenklad bild av vad bokstäverna står för och att det krävs annorlunda, inte mer, träning för att eleverna ska få en djupare förståelse (Häggström, 1994).

Ekvationerna i uppgift 5 och 6 kräver inte att eleverna har några mer ingående uppfattningar om bokstavens betydelse annat än att de tilldelar bokstaven ett värde (punkt 1) och sedan tillämpar prioriteringsreglerna, men elever som uppfattar bokstäver enligt punkt 2 eller 3 ovan kommer inte att klara av att lösa ekvationerna. Av lösningsfrekvensen av den första ekvationen att döma kan man göra tolkningen att 15 % av eleverna inte förstår vad ekvationen innebär eller så räknar de fel i något led.

Om en elev tolkar bokstaven som ett objekt eller som en förkortning (punkt 3) blir ekvationer ofta obegripliga, men samma elev kommer att kunna utföra vissa förenklingar av algebraiska uttryck som $3b + 4b - 2b$.

Skillnaden i lösningsfrekvens mellan uppgift 5 och 6 var åtta procentenheter 2016, men då uppgift 6 är en flervalsfråga som det går att gissa rätt på torde den egentliga skillnaden i lösningsfrekvens vara större. Det vill säga, några av de elever som svarade rätt på uppgift 6 kan ju ha haft tur och hade inte löst ekvationen utan svarsalternativ. Uppgift 5 kan lösas genom att utföra en metod eller genom att man ”ser” att svaret blir 4.

I uppgift 6 är svaret ett negativt tal, vilket många elever har svårt för. Å andra sidan går det att pröva sig fram med de föreslagna x-värdena, vilket kan indikera förståelse för begreppet ekvation.

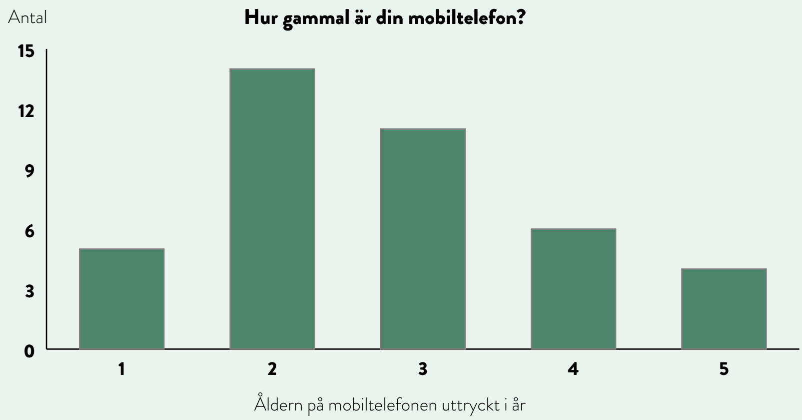
Hur elever förstår negativa tal undersöks i avhandlingen *Making sense of negative numbers* (Kilhamn, 2011) och i beskrivningen av de negativa talen framgår att de traditionellt uppfattats som ett svårt område inom skolmatematiken. Kilhamn skriver också att de negativa talen sällan används i vardagslivet, men att de är nödvändiga för algebran, vilket gör att elever som inte lär sig behärska negativa tal kommer att få stora svårigheter i gymnasiets matematikkurser.

Uppgift 7 är uppenbart svårare än övriga ekvationer, men kräver inte några avancerade beräkningar och talen som behandlas ligger i talområdet mellan 0 och 7. Det är visserligen fullt möjligt att lösa uppgiften genom prövning, men det kräver att eleverna dels kan hålla flera beräkningar i huvudet samtidigt och dessutom förstår att noll kan vara en lösning.

Eleverna som uppfattar x som ett specifikt okänt tal (punkt 4 i listan över uppfattningar) eller har lärt sig metoderna för ekvationslösning kommer relativt enkelt fram till att $7x = 4x$, men här finns en stor risk att många elever uppfattar likheten som en omöjlighet eftersom talet noll av många uppfattas som problematiskt. Talet noll skiljer sig från övriga tal på många sätt och det är viktigt att noll blir en naturlig del av taluppfattningen. Det kan vara värt att notera att uppgifter av denna typ, där lösningen av ekvationen blir noll, sällan förekommer i läromedel. Det räcker att ta en titt på facit för att se hur sällan noll förekommer som en lösning till uppgifter som involverar ekvationer.

Sammanfattningsvis tyder skillnaderna i lösningsfrekvens mellan uppgift 5, 6 och 7 på brister i förståelse av talbegreppet och förmåga att hantera procedurer för att lösa ekvationer.

Uppgift 8. Diagrammet visar hur gamla telefoner några lärare på en skola har



a. Vilken är medianåldern för mobiltelefonerna i undersökningen?
b. Hur beräknar man medelåldern för mobiltelefonerna? Du behöver inte beräkna medelåldern, du behöver endast beskriva hur du skulle beräkna det.

Lösningsfrekvens: 8a 50–54 %. Genomsnitt 53 %. 8b 44–51 %. Genomsnitt 48 %. Max 1 poäng/deluppgift.

Statistik är ett angeläget område eftersom mycket av den information vi som samhällsmedborgare förväntas förstå och använda kommer via statistik i olika former. En stor del av den faktakunskap som produceras kommer från statistiska beräkningar (denna rapport är ett exempel) och det ställs idag krav på att våra elever ska kunna tolka och kritiskt granska stora mängder information för att klara av framtidens arbets- och samhällsliv, vilket inte alltid är lätt.

Av dessa skäl finns statistik med i det centrala innehållet i grundskolan och i gymnasieskolan. Till exempel ska eleverna i årskurs 4–6 arbeta med tolkning av data i tabeller och diagram samt lägesmåtten medelvärde, typvärde och median, och på den första kursen på gymnasiet arbetar elever på högskoleförberedande program med granskning ”av hur statistiska metoder och resultat används i samhället och inom vetenskap” (Skolverket, 2011a; 2011b, s. 98). Elever på yrkesprogram arbetar med beskrivande ”statistik med hjälp av kalkylprogram samt granskning av hur statistiska metoder och resultat används i samhället och i yrkeslivet” (Skolverket, 2011b, s. 93).

Ungefär hälften av eleverna som skrev provet lyckades lösa uppgift 8a och 8b. Det är i sammanhanget värt att notera att uppgift 8a kan dölja en missuppfattning hos eleverna. Elever som tror att ”mittenvärdet” avser värdet på den mittersta stapeln kommer att ange ett korrekt svar, trots ett felaktigt resonemang.

Det kan vara effektivt att ibland använda sig av flervalsfrågor som avslöjar vanliga missuppfattningar hos eleverna. På så sätt kan läraren snabbt och enkelt ge individuell feedback till eleverna och påtala de missuppfattningar som finns i klassen. I uppgift 8a hade till exempel en förskjutning av medianåldern till fyra i stället för tre år givit en indikation på en vanlig missuppfattning.

Matematikdidaktiktern Jorryt van Bommel (2012) beskriver hur man genom att använda de rätta felsvaren, kan få reda på mycket om elevens kunskaper som annars går förlorat. I artikeln behandlas främst aritmetik för de lägre åldrarna, men principen att noga överväga felsvaren på diagnostiska test är allmängiltig och värd att fundera lite extra på.

Resultatet av uppgift 8a och 8b är svårtolkat av flera skäl än det ovan angivna. För att svara korrekt krävs, som ofta, kunskaper inom flera områden. Eleverna måste förstå frågan, tolka diagrammet, kunna begreppet median respektive medelvärde och slutligen lyckas beräkna eller beskriva resultatet. Ett korrekt svar ger därför en hel del information om vad eleven kan, men ett felaktigt svar kan dölja flera luckor i elevens matematiska kunnande.

En annan svårighet med uppgift 8 är att det finns numeriska värden på både *x*- och *y*-axeln, vilket naturligtvis kan försvåra för elever som inte till fullo har förstått begreppen.

Till skillnad från 8a ombeds eleven i 8b att beskriva hur man beräknar medelvärdet utan att behöva beräkna det. De ska i 8b inte utföra en procedur utan kunna beskriva den skriftligt. Detta ställer krav på både kommunikationsförmåga och begreppsförståelse.

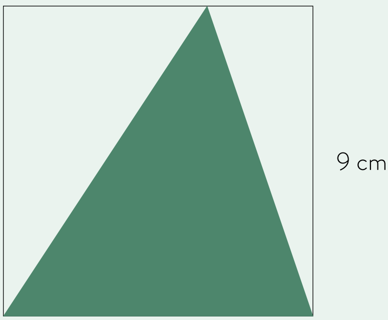
Det kan vara intressant att jämföra med lösningsfrekvensen på en uppgift från PISA 2012. Först är det viktigt att notera att uppgifterna i PISA syftar till att utvärdera 15-åringars förmåga att formulera, använda och tolka matematik i en mängd olika realistiska sammanhang (Skolverket, 2016b).

I en av uppgifterna från PISA 2012 ställs tre frågor kring ett stapeldiagram. Frågorna består i princip av att kunna avläsa rätt värde ur diagrammet (Skolverket, 2012a). Uppgiften klassades som den lägsta nivån i PISA:s ramverk och löstes av ca 80 % av eleverna. I uppgift 8 som också handlar om stapeldiagram, och med en lösningsfrekvens runt 50 %, krävs inte enbart avläsning av värden utan även att behärska begreppen median och medelvärde.

GEOMETRI

På provet gavs det fem uppgifter inom geometri. Tre uppgifter har valts ut som intressanta från provet och lösningsfrekvensen har varit i princip konstant över tid. Den första uppgiften kan ses som en ren geometriuppgift medan de två andra synliggör hur nära sammankopplade geometri och algebra är.

Uppgift 9. I en kvadrat har vi ritat en triangel, enligt figuren.
Beräkna den skuggade triangelns area utan att mäta i figuren.



Lösningsfrekvens: 62–64 %. Genomsnitt 63 %. Max 1 poäng.

I grundskolans kursplan för matematik anges att eleverna i årkurs 1–3 ska arbeta med de grundläggande geometriska figurerna och relationerna mellan dessa. I årskurs 4–6 arbetar eleverna till exempel med area och omkrets. I grundskolans senare årskurser arbetar man med allt fler egenskaper hos och relationer mellan geometriska begrepp (Skolverket, 2011a). På gymnasieskolan skiljer sig innehållet åt när det gäller geometri beroende på vilket program eleven går. Till exempel ska elever på yrkesprogrammen arbeta med geometriska begrepp ”valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel skala, vektorer, likformighet, kongruens, sinus, cosinus, tangens och symmetrier” (Skolverket, 2011b, s. 92).

Uppgift 9 kräver utöver förståelse av begreppen triangel, kvadrat och area att eleven urskiljer att sidan i kvadraten också är höjd i triangeln. Vidare ska eleven kunna beräkna area för en triangel samt utföra beräkningen $(9 \cdot 9)/2$. I sammanhanget torde urskiljande av höjden vara det som är svårast, men elever som är svaga i huvudräkning kan också misslyckas med själva uträkningen. Det kan också finnas elever som helt enkelt bara ”vet” att arean för triangeln är halva kvadraten.

I de två kommande uppgifterna synliggörs hur geometrin ofta involverar kunskaper i algebra och förmågan att resonera utifrån kända sanningar i matematiken, till exempel att vinkelsumman alltid är 180 grader i en triangel. I årskurs 7–9 ingår att arbeta med geometriska ”satser och formler och behovet av argumentation för deras giltighet”, vilket fördjupas vidare på gymnasieskolans första kurs, till exempel i kurs 1b, där eleverna ska möta illustration "av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma" (Skolverket, 2011a, s. 66, 2011b, s. 98).

Uppgift 10. I figuren visas en rätvinklig triangel. Hur stor är vinkeln *v*?

Lösningsfrekvens: 47–51 %. Genomsnitt 50 %. Max 1 poäng.

Algebra och geometri är två områden inom matematiken som är intimt förbundna med varandra. Algebraiska formler används för att uttrycka egenskaper så som omkrets, area och volym hos de geometriska figurerna. Geometriska härledningar och bevis genomförs också ofta med hjälp av resonemang där algebraiska uttryck hanteras.

Historiskt sett har geometri föregått algebra. Sedermera har utvecklingen av algebra underlättat hanteringen av geometrin samtidigt som den har möjliggjort en vidareutveckling av denna (Tengstrand, 2005). Att förstå kopplingen mellan dessa två områden skapar en djupare förståelse av matematiken samt hjälper eleverna att kunna växla mellan olika representationer vid problemlösning.

I uppgift 10 krävs just kunskaper i både geometri och algebra. Eleven behöver komma ihåg att vinkelsumman i en triangel är 180 grader och kan använda informationen i ett resonemang för att lösa uppgiften. De behöver också komma ihåg att en rät vinkel på 90 grader betecknas som den gör i figuren. Ytterligare svårigheter involverar att inse att v står för antal grader för en okänd vinkel och att man behöver lösa ekvationen $v+2v+90=180$ och utföra beräkningen 90/3. Från uppgift 5 vet vi att ca 85 % av eleverna klarar att lösa en ekvation med obekanta i det vänstra ledet.

Elever som inte klarar uppgiften kan ha brister i sitt matematikkunnande antingen i geometri eller i algebra, eller båda, samt i begrepps-, procedur- och resonemangsförmåga.

Uppgift 11. En sida i en rektangel är $3a$ och rektangels area är $21a^2$.
Skriv ett uttryck för rektangelns omkrets.

Lösningsfrekvens: 22–26 %. Genomsnitt 24 %. Max 1 poäng.

Uppgift 11 kräver både kunskap om begreppen area och omkrets, men troligtvis är det svårigheter inom algebra och resonemangsförmåga som gör att lösningsfrekvensen är den lägsta inom området geometri och den tredje lägsta av alla uppgifter på provet. Uppgift 11 medför att eleverna måste uppfatta variabeln *a* som ett okänt tal för att kunna genomföra det resonemang som krävs för att lösa uppgiften. Det betyder alltså att eleverna besitter någon av de högre nivåer som Kücheman (1981) fann i sin forskning och som presenterades kortfattat under avsnittet om ekvationer.

I motsats till ekvationerna räcker det alltså inte att eleverna prövar sig fram med olika tal. Eleverna måste genomföra ett algebraiskt resonemang, men själva resonemanget är förhållandevis enkelt, vilket gör att uppgiften skapar en tydlig skiljelinje mellan de som har förmåga att resonera algebraiskt och de som fortfarande resonerar mer aritmetiskt. Att resonera aritmetiskt genom att använda numeriska värden leder till svårigheter när elever hamnar i en problemlösningssituation (Szabo, 2015).

PROBLEMLÖSNING

På provet gavs det fyra uppgifter inom området problemlösning. Tre uppgifter har valts ut som intressanta och lösningsfrekvensen har varit i princip konstant över tid. Problemlösning har en särställning i matematikundervisningen och är framskriven både som en förmåga och som ett centralt innehåll såväl i grundskola som i gymnasieskola. Matematiska problem brukar beskrivas som en uppgift där eleven som ska lösa uppgiften inte omedelbart vet hur den ska göra. Eleven har inte tillgång till ett recept eller en metod.

Av denna beskrivning följer att vad som är ett problem för en elev inte nödvändigtvis är det för en annan. Ett problem är så att säga aldrig ett problem i sig utan är det alltid i relation till den som löser det (Niss, M. & Højgaard-Jensen, 2002; Carlson & Bloom, 2005). Dessutom är ett problem vid ett tillfälle för en individ kanske inte ett problem vid ett senare tillfälle (Arcavi & Friedlander, 2007). Detta medför att lösningsfrekvenserna för respektive uppgift inte enbart visar elever med god problemlösningsförmåga, utan också de elever som redan visste hur de ska lösa uppgiften. De två första uppgifterna framstår som mer vanligt förekommande i läromedel, och kanske inte i så hög utsträckning försätter eleverna i en problemlösningssituation. Samtidigt har ett sommarlov förflutit mellan tiden då eleven lämnade grundskolan och den skolmatematiska praktiken och då provet gjordes.

Uppgift 12. Kalle åker bil. När han åkt 3 timmar har han kommit 240 km. Hur långt kommer han på 3,5 timmar om han åker lika fort? Visa dina beräkningar.

Lösningsfrekvens: 72–73 %. Genomsnitt 73 %. Max 2 poäng.

Pólyas klassiska indelning av problemlösning i olika delar i boken *How to solve it* (1948) kan vara till hjälp när en lärare undervisar eller försöker förstå vilka svårigheter en elev ställs inför i problemlösningssituationen. De fyra delarna i processen är:

1. Förstå problemet
2. Sätt upp en plan
3. Genomför planen
4. Tolka resultatet

Samtidigt kan det vara bra att vara uppmärksam på att en problemlösningsprocess sällan är linjär utan kan bestå av många omtag och olika flöden mellan Pólyas steg (Jahnke, 2014, 2016).

Uppgift 12 prövar elevens förmåga att göra beräkningar utifrån ett proportionellt samband och själva beräkningen är relativt enkel. Situationen som presenteras är bekant för en hel del elever och många betraktar nog inte uppgiften som ett problem utifrån den beskrivning som gavs tidigare. Som referens till lösningsfrekvensen kan nämnas att nästan 25 % av eleverna som skrev provet 2014 hade E i betyg från grundskolan.

En anledning till att eleverna inte fick båda poängen kan vara en bristande redovisning av sina beräkningar. I relation till Pólyas problemlösningsstrategi är det värt att påpeka att de uppgifter som elever möter i skolan nästan alltid innehåller en metanivå. Det är inte primärt elevens egna problem som skall lösas utan en konstruerad uppgift som ska testa eller träna eleven. Elevens problem är alltså också att förstå vad läraren vill ha för svar och att redovisa det så att läraren förstår. Även duktiga elever kan ha svårt för detta och det kan vara svårt att synliggöra duktiga elevers resonemang i samband med problemlösning (Sriraman, 2003; Öystein, 2011). Om eleverna inte uppfattar denna aspekt av uppgiften och därför anser sig färdiga när de kommit fram till ett svar utan att skriftligt ha redovisat beräkningar och argument, kommer det i statistiken anses som en icke korrekt löst uppgift.

Uppgiften ställer alltså krav på förmågan både att resonera och att skriftligt kunna kommunicera sitt resonemang.

Uppgift 13. Vera springer 3 kilometer på 18 minuter. Vilken är hennes medelfart uttryckt i km/h? Visa dina beräkningar.

Lösningsfrekvens: 31–35 %. Genomsnitt 33 %. Max 2 poäng.

Liksom uppgift 12 prövar uppgift 13 elevens förmåga att göra beräkningar utifrån ett proportionellt samband. Lösningsfrekvens är däremot betydligt sämre än i uppgift 12. Endast en tredjedel av alla elever kunde lösa uppgiften. Några elever kan säkert anse det försvårande att det i lösningen efterfrågas ett svar i km/h medan givna fakta är i kilometer och minuter.

Det andra steget i problemlösningsstrategin innebär att man ska sätta upp en plan och kanske är det här eleverna fastnar. Pólya ger flera olika förslag på hur man kan lösa problem och i detta fall är nog att genomföra ett resonemang den bästa metoden. Av lösningsfrekvensen att döma är det dock få elever som lyckas klara av det resonemang som krävs och kommunicera sitt resonemang skriftligt på ett korrekt sätt.

Sammanfattningsvis visar de elever som har misslyckats med uppgiften brister i kommunikations- och resonemangsförmåga.

Om svårigheten i uppgift 13 bestod i att sätta upp en plan, så är det snarare genomförandet av planen som är det svåra i nästa uppgift.

Uppgift 14. Sofia är på stranden och badar. Hon köper en hamburgare för en tredjedel av sina pengar och sedan köper hon glass för 30 kr. Efter det har hon hälften av sina pengar kvar. Hur många kronor tog Sofia med sig?

Lösningsfrekvens: 21–24 %. Genomsnitt 22 %. Max 3 poäng.

Uppgift 14 kan anses i högre utsträckning än uppgift 12 och 13 försätta eleverna i en problemlösningssituation, det vill säga att de inte omedelbart vet hur de ska lösa uppgiften. Det finns liknande uppgifter i många läromedel men i uppgift 14 handlar det inte om att tillämpa en formel utan mer om modellering, med andra ord, att kunna tolka texten och omformulera informationen till matematik.

Fakta och frågeställning är klart uttryckta i uppgiften, vilket gör att eleverna troligen förstår vad som efterfrågas. I nästa steg ska eleven sätta upp en plan och här kan vi tänka oss både en ekvation och ett resonemang för att lösa uppgiften. I det tredje steget ska eleverna lyckas fullfölja sina planer. De elever som valt ekvation som lösningsstrategi riskerar att fastna i den, för åldersgruppen, relativt krångliga ekvationen $x/3 + 30 = x/2$. Vi ska ha i minne att både bråkräkning och algebra av många uppfattas som svårt. Att fullfölja denna plan kan alltså innebära stora problem för många elever och det är ofta svårt att byta plan när man väl börjat (Szabo, 2015).

De elever som i stället försöker resonera sig fram får, för åldersgruppen, en enklare uppgift. Resonemanget, med eller utan skiss, blir ungefär så här: *om en tredjedel + 30 kr är en halv, måste en hel vara lika med två tredjedelar + 60 kr, då är 60 kr lika med en tredjedel och det hela lika med 180 kr.*

Många elever skulle nog anse att resonerandet var att föredra, men detta gäller naturligtvis inte alltid. I en klassrumssituation är det därför viktigt att presentera flera olika lösningsstrategier så att eleverna blir medvetna om att det inte bara finns en väg till lösningen. Ett sätt att visa på styrkan i ekvationslösning som metod skulle i detta fall vara att byta en tredjedel mot en sjundedel och en halv mot en femtedel i uppgiften. Ekvationen kommer då att lösas lika lätt, medan resonemanget blir betydligt mer komplicerat. En sådan demonstration kan skapa motivation hos elever att lära sig de metoder som krävs för att bli effektiva ekvationslösare.

Elever som har misslyckats med uppgiften har alltså haft svårigheter med att tolka uppgiften, hitta en modell som beskriver problemet med matematik och därefter använda modellen för att lösa uppgiften.

Uppgifter som beskriver en realistisk problemsituation är i fokus på PISA. Dock är dessa uppgifter mer omfattande än uppgifterna 12–14. Det kan vara intressant att notera att 2015 var det 21 % och 2012 var det 27 % som nådde endast nivå 1, vilket innebär att eleven kan lösa uppgifter där all relevant information tydligt framgår och där endast rutinmässiga beräkningar krävs (Skolverket, 2016b).

ARBETA MED

Fjorton matematikuppgifter med tillhörande lösningsfrekvens har presenterats. Vilka slutsatser och lärdomar kan vi dra i syfte att förbättra övergången mellan grundskolans och gymnasieskolans matematikutbildning? Hur kan vi rusta eleverna inför gymnasiets matematikkurser och hur blir vi bättre på att ta emot grundskolans elever?

KOMBINERA BEGREPP FRÅN OLIKA OMRÅDEN

Först kan vi observera att uppgifterna med en lägre lösningsfrekvens tenderar att involvera begrepp från olika områden av det centrala innehållet i grundskolan. Till exempel i uppgift 1 kan jämförandet av storleken på tal skrivna på bråkform medföra behov av att multiplicera stora tal. I uppgiften 2 ställs en fråga om både kvadratroten ur ett tal och π. Dessa tal behandlas traditionellt sett inom olika områden, inom taluppfattning lyfts kvadratrötter som exempel på ett irrationellt tal medan π behandlas och används inom geometri, vid beräkningar av area och omkrets av cirklar. I uppgift 6 och 7 utmanar relativt enkla ekvationer elevers förståelse av negativa tal och talet noll. I uppgift 10 ska en vinkel beräknas utifrån en bild där både v och $2v$ är markerade, vilket medför att både geometri och algebra adresseras. I uppgift 11 ska ett algebraiskt uttryck konstrueras som anger en rektangels omkrets med sidan $3a$ och problemlösningsuppgiften 13 involverar plötsligt enhetsomvandlingar.

För att uppfylla det som står i läroplanen, ”att kunna använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet”, räcker det inte med ett fragmentariskt kunnande. Elever behöver kunna röra sig fritt från ett matematiskt område till ett annat.

Det centrala innehållet i grundskolans kursplan är sorterat under rubrikerna: Tal och tals användning; Algebra; Geometri; Sannolikhet och statistik; Samband och förändring samt Problemlösning. Samtidigt som det finns en lång tradition att kategorisera matematik i olika områden, inte minst i läromedel, är de olika områdena nära förbundna med varandra. Ju bredare och djupare matematikkunnandet blir desto fler samband mellan begrepp lär man sig att urskilja och använda. I ämnesplanen för matematik på gymnasiet används några indelningar i det centrala innehållet som är mer områdesöverskridande. I kurserna 1a–c och 2a–c finns rubriken ”Taluppfattning, aritmetik och algebra” och i kurs 3c finns ”Aritmetik, algebra och geometri” (Skolverket, 2011b).

I analysen av uppgifterna ser vi dessutom att det finns en koppling mellan begreppsförståelse och proceduranvändning, till exempel vid ekvationslösning och bråkräkning. Där begreppsförståelsen brister blir det svårt för eleverna att tillämpa procedurerna då denna tillämpning är beroende av memorering och inte av resonemang. Samtidigt är det viktigt att inte sätta begrepps- och procedurförmåga mot varandra. De är ömsesidigt beroende av varandra och att effektivt kunna utföra procedurer är ofta viktigt för att korrekt kunna lösa en uppgift.

Redan i förskolans läroplan lyfts vikten av begreppen, där förskolan ska sträva efter att alla barn utvecklar en förmåga "att urskilja, uttrycka, undersöka, använda begrepp och samband mellan begrepp" (Skolverket, 2010, s. 10). Detta följs av att eleverna i grundskolan ska "analysera och använda" och i gymnasieskolan ska eleverna "beskriva innebörd och använda" begrepp och samband mellan begrepp (Skolverket, 2011a, s. 63, 2011b, s. 90).

I flera uppgifter i analysen har vi lyft fram vikten av att tidigt introducera begrepp som vi vet är svåra att lära sig att behärska, så som nollan, bråk, negativa tal och algebra. Det är dessutom viktigt att tidigt identifiera vilka aspekter av ett begrepp – och det kan finnas många aspekter – som eleverna missuppfattar eller har svårt för. I samband med detta behöver lärare använda noggrant utformade uppgifter som kan hjälpa eleven att klargöra missuppfattningarna.

ANVÄNDA OCH KOMMUNICERA RESONEMANG

I flera av uppgifterna finns det möjlighet till eller rent av krävs det ett matematiskt resonemang för att lösa uppgiften. I såväl förskolans som grund- och gymnasieskolans styrdokument ingår det att undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmågan att föra och följa resonemang. På gymnasiet ska eleverna även ges möjlighet att lära sig att bedöma resonemang.

Men vad är resonemang? Ibland förknippas resonemang i matematik med formella bevis men begreppet är bredare än så och ingår som en del i skapande, prövande och intuitiva aktiviteter. Det kan involvera undersökningar, gissningar, ifrågasättande och delvisa förklaringar (NCTM, 2009).

Samtidigt är inte begreppet resonemang hur brett som helst. Inom matematik strävar vi ju efter att konstruera resonemang som övertygar både oss själva och andra om att svaret vi har funnit till problemet är det rätta.

Ett korrekt resonemang kan ses som det som binder ihop två påståenden som är lika sanna. "Påståenden som vi redan har övertygat oss om är sanna används i resonemang för att etablera nya sanningar. Vi hoppar från tuva till tuva av sanningar" (Jahnke, 2016, s. 64).

I uppgift 1 där man ska avgöra vilket av fyra bråk som är större än 7/13 finns det möjlighet att lösa uppgiften genom att föra ett resonemang där bråken jämförs med 1/2. Påståendena "endast ett av talen är större än 7/13", "7/13 är större än 1/2" och "alla tal utom 6/11 är mindre än 1/2" kan bindas ihop och ge oss ett resonemang som ger det korrekta svaret att 6/11 är större än 7/13.

I uppgift 2 krävs ett resonemang för att kunna uppskatta värdet på $\sqrt{5}$ och markera det på en tallinje. Uppgifterna 5, 6 och 7 innebär att lösa olika ekvationer. Ekvationslösning kan illustrera hur resonemang binder ihop lika sanna påståenden. Om vi utgår från att $7x - 5 = x + 4x - 5$ är sant, då kan vi addera 5 i vänster respektive höger led och konstatera att $7x = x + 4x$. Vi kan då addera antal x i höger led och nå $7x=5x$. Minskar vi vänster och höger led med $5x$ får vi att $2x=0$. Det enda tal som uppfyller denna ekvation är 0. Hela kedjan är här ett resonemang.

I uppgift 10 efterfrågas en vinkel givet en figur på en rätvinklig triangel där vinklarna är markerade med v och $2v$. Även här krävs ett resonemang och vi behöver också komma ihåg att för triangel är det alltid sant att vinkelsumman blir 180. Denna sanning behöver vi använda då vi ska lösa uppgiften. I uppgift 11 krävs att man kan resonera med algebraiska uttryck och i uppgift 12, 13 och 14, som kan medföra att eleverna försätts i en problemlösningssituation, krävs resonemang.

Speciellt bör påpekas att i en del uppgifter krävs det att eleverna inte bara resonerar för sig själva och kan ange ett korrekt svar utan att de också kan redogöra för sitt resonemang skriftligt. Detta är ofta svårt för eleverna och något som behöver tränas. Vad som ska anses vara ett korrekt resonemang och tillfredsställande redovisat är något som skapas i den skolmatematiska praktiken på såväl grundskolan som gymnasieskolan. Inom matematematikdidaktisk forskning lyfts betydelsen av de normer, ofta benämnda sociomatematiska normer, som skapas i ett klassrum (Cobb & Yackel, 1996). Att som lärare bli medveten om och utmana de normer som råder i sitt klassrum har haft en framträdande roll i Matematiklyftets material.

Det kan vara intressant att notera att TIMSS mäter tre olika kognitiva områden, där *resonera* är ett. De övriga är *veta* och *tillämpa*. TIMSS 2011 visade för årskurs 8 en försämring inom området resonera jämfört med TIMSS 2007 (Skolverket, 2012b). Glädjande nog visade TIMSS 2015 att åttondeklassarna hade förbättrat sin förmåga att resonera matematiskt (Skolverket, 2016c).

LÖSA PROBLEM

Uppgifterna 13 och 14 hade som syfte att pröva förmågan att lösa problem och lösningsfrekvensen var i genomsnitt 33 % respektive 22 %. Vikten av att som elev uppleva och lära sig hantera problemlösningssituationer i matematik kan inte nog poängteras. Ett matematikkunnande är inte ett nollsummespel, det vill säga, ökad problemlösningsförmåga leder inte till sämre kunskaper inom andra delar av ett matematikkunnande.

Alan Schoenfeld (1985) har analyserat vilka faktorer som påverkar resultatet när elever arbetar med problemlösning. Han har identifierat fyra faktorer: 1) ”resources” som innebär elevernas kunskaper om metoder, algoritmer och fakta; 2) ”heuristics” som syftar på strategier och tekniker för problemlösning (rita figur, associera med andra problem, lösa baklänges, testa sig fram, etc.); 3) ”control” som syftar på hur effektivt valet av resurser och strategier är vid lösning av uppgifter; 4) ”belief systems” som avser elevernas syn på matematik och på sig själva i matematiksituationer. Detta innebär att en utveckling av problemlösningsförmågan inte sker på bekostnad av andra matematiska förmågor.

UPPRÄTTHÅLLA MATEMATIKKUNNANDET

I slutsatserna så här långt har vi lyft fram vikten av problemlösning, komma ihåg att resonera och kunna kommunicera ett resonemang, och lösa uppgifter som involverar begrepp – ibland svåra begrepp – från olika områden inom matematiken. Samtidigt som det är viktigt att tidigt introducera sådant vi vet tar tid att lära sig är det också viktigt med kontinuitet i att utöva matematik. De fjorton uppgifternas innehåll kopplades i analysen inte bara till grundskolans kursplan utan även till gymnasieskolans ämnesplan. Med andra ord, alla begrepp, metoder och förmågor utgör också ett innehåll i gymnasieskolans matematikutbildning. Det finns en kontinuitet att uppmärksamma i elevens matematikutbildning och ta ett gemensamt ansvar för.

Det är möjligt att betrakta ett matematikkunnande som en praktisk kunskap vilket medför att kunskapen delvis är tyst och oformulerad, och kommer till uttryck genom handlingar i den praktik vi är verksamma i (Jahnke, 2014). Praktisk kunskap erövras och upprätthålls genom att ha tillgång till aktuella erfarenheter som används, diskuteras och reflekteras över tillsammans med andra. Detta medför att ett sommarlov kan innebära att eleverna tappar en del av sitt matematikkunnande – sin praktiska kunskap – som de utvecklat inom grundskolans praktik. Även om man försökt beakta detta vid konstruktionen av provet kan det spela roll för resultatet på provet. Det finns studier kring så kallad "summer learning loss" och det finns, till exempel, en metaanalys över ett flertal studier som visar att alla elever presterar sämre på ett matematikprov efter ett sommarlov jämfört med innan sommarlovet (Cooper m.fl., 1996). Speciellt tenderar frånvaron av att delta i skolans praktik påverka kunskaperna hos elever med lägre socioekonomisk bakgrund.

Hatties metaanalys visar att sommarlov har en liten negativ effekt på lärande då eleverna glömmer en del av det de har lärt sig. När det gäller matematikkunnandet är effekten större i jämförelse med läsning. Hattie påpekar dessutom att denna effekt ökar med åldern, vilket innebär att sommarlovet har en större negativ effekt mellan till exempel årskurs 8 och 9 än vad den har mellan årskurs 2 och 3 (Hattie, 2008).

Det kan vara intressant att leka med tanken att inte genomföra ett diagnostiskt prov direkt vid start av gymnasiet utan till exempel en månad in på terminen. Då har eleverna fått chansen att i praktiken återuppta och återkalla sitt matematikkunnande.

Avslutningsvis, kontinuitet är inte enbart viktigt för elevernas kunskapsutveckling utan för oss alla involverade i skolans praktik – lärare, rektorer och skolchefer. Under 2016 avslutades Matematiklyftet, en fortbildningsinsats som involverat 36 000 matematiklärare och 800 huvudmän under ett år (Skolverket, 2016d). Matematiklyftets utvärderingar visar på att undervisningen har utvecklats och att lärarna är nöjda. De upplever sig vara mer medvetna om sina undervisningsbeslut och har tillgång till fler undervisningsmetoder (Ramböll, 2016; Österholm m.fl., 2016). Även rektorers arbete med att utveckla undervisningen och att arbeta med lärares kompetensutveckling har påverkats. Samtidigt pekar både utvärderingar och forskning på vikten av långsiktighet och att fortsätta, utifrån nyvunnen kunskap, utveckla den egna verksamheten utifrån lokala behov (Ramböll, 2016; Österholm m.fl., 2016; Stockholms stads utbildningsförvaltning 2016b; Jahnke, 2015). För att stimulera ett sådant arbete avslutas rapporten med olika typer av diskussionsstöd för att berika det lokala samtalet inom huvudmannens organisation och verksamhet.

SAMTAL OCH HANDLING

I detta avsnitt finner du en rad diskussionsfrågor riktade till lärare på grundskola respektive gymnasium samt rektorer och skolchefer. Förutom diskussionsfrågor till olika professioner finns också ett stöd för ett strukturerat samtal, inspirerat av så kallad kollegahandledning (Lavås m.fl., 1997). I detta stöd specificeras samtalets innehåll utifrån deltagarnas bidrag och genom att följa strukturen. Stödet kan med fördel användas vid diskussioner mellan grundskolelärare och gymnasielärare eller mellan rektorer och lärare. Sist i avsnittet finner ni alla de fjorton uppgifterna samlade som stöd för era samtal samt förslag på mer forskningslitteratur.

Avsnittets olika stöd för samtal kan ni använda för att på egen hand fortsätta den matematikdidaktiska analysen och planera vidare såväl undervisningens genomförande som samarbetsformer, eventuella behov av utvecklingsarbete eller kompetensutveckling.

TILL GRUNDSKOLELÄRARE

SAMTAL

1. **Ge exempel från er undervisning där ni speciellt uppmärksammat och arbetat med att förbereda eleverna för gymnasiets matematik. Varför var just detta område viktigt att arbeta med? Går era exempel att relatera till rapportens slutsatser om att arbeta med att kombinera begrepp från olika områden, använda och kommunicera resonemang, lösa problem och upprätthålla matematikkunnandet? Saknas någon slutsats tycker ni?**

2. **Hur arbetar ni eller skulle vilja arbeta med att**

   ★ kombinera begrepp från olika områden?

   ★ avslöja missuppfattningar eller bidra till att skapa förståelse av olika aspekter av negativa tal, bråk och algebra?

   ★ använda resonemang och kommunicera resonemang?

   ★ lösa problem?

   ★ introducera svåra begrepp och metoder tidigare?

   ★ upprätthålla matematikkunnandet genom att repetera och planera sekvenser av innehåll över tid så att eleverna förbereds väl inför gymnasiet?

   ★ bedöma elevers matematikkunnande? Behöver bedömningsverktygen utvecklas?

   ★ använda resultatet från era bedömningar till att bättre anpassa undervisningen och förbereda väl för gymnasiet?

TILL GRUNDSKOLELÄRARE

HANDLING

Utifrån erfarenheten av att läsa och samtala om rapporten:

1. **Är det något ni skulle vilja pröva och följa upp i er undervisning nästa vecka? Denna terminen? Under detta läsår?**

2. **Är det något ni skulle vilja läsa mer om?**

3. **Vad skulle ni vilja fortsätta diskutera**

    - ★ med varandra vid nästa träff?
    - ★ en grupp gymnasielärare?
    - ★ er rektor eller någon vid förvaltningen?
    - ★ forskare?

4. **Avsluta med att göra en plan för nästa steg både när det gäller undervisning, läsning och framtida samtal.**

TILL GYMNASIELÄRARE

SAMTAL

1. **Ge exempel från er undervisning där ni speciellt uppmärksammat och arbetat med att ta emot eleverna från grundskolan med avseende på deras förkunskaper. Varför var just detta område viktigt att arbeta med? Går era exempel att relatera till rapportens slutsatser om att arbeta med att kombinera begrepp från olika områden, använda och kommunicera resonemang, lösa problem och upprätthålla matematikkunnandet? Saknas någon slutsats tycker ni?**

2. **Hur arbetar ni eller skulle vilja arbeta med att**

    - ★ kombinera begrepp från olika områden?
    - ★ avslöja missuppfattningar eller bidra till att skapa förståelse av olika aspekter av negativa tal, bråk och algebra?
    - ★ använda resonemang och kommunicera resonemang?
    - ★ lösa problem?
    - ★ introducera svåra begrepp och metoder tidigare? Finns det begrepp/metoder inom gymnasieskolans senare kurser som går att på lämpligt sätt låta eleverna uppleva tidigare? Till exempel gränsvärde, bevis, komplexa tal och funktioner?
    - ★ återuppta och upprätthålla matematikkunnandet genom planeringen, genomförandet och uppföljningen av starten av gymnasiet?
    - ★ bedöma elevers matematikkunnande? Behöver bedömningsverktygen utvecklas?
    - ★ använda resultatet från era bedömningar till att bättre anpassa undervisningen och ta emot eleverna väl från grundskolan?

TILL GYMNASIELÄRARE

HANDLING

Utifrån erfarenheten av att läsa och samtala om rapporten:

1. **Är det något ni skulle vilja pröva och följa upp i er undervisning nästa vecka? Starten av detta eller nästa läsår? Under detta läsår?**

2. **Är det något ni skulle vilja läsa mer om?**

3. **Vad skulle ni vilja fortsätta diskutera**

    ★ med varandra vid nästa träff?

    ★ en grupp grundskolelärare?

    ★ er rektor eller någon vid förvaltningen?

    ★ forskare?

4. **Avsluta med att göra en plan för nästa steg både när det gäller undervisning, läsning och framtida samtal.**

TILL REKTORER OCH SKOLCHEFER

SAMTAL

1. **Ge exempel från er verksamhet där ni speciellt uppmärksammat och arbetat med övergången mellan grundskolans och gymnasieskolans matematikutbildning. Varför var just detta område viktigt att arbeta med? Går era exempel att relatera till rapportens innehåll? Saknas några slutsatser tycker ni?**

2. **Hur arbetar ni eller skulle vilja arbeta med att**

   ★ systematisera samarbetet mellan grundskola och gymnasieskola för både lärare och rektorer?

   ★ planera, genomföra och följa upp ett sådant samarbete?

   ★ skapa rutiner på skolan och förvaltningen för att systematiskt analysera elevernas kunskapsutveckling?

   ★ överföra informationen mellan olika skolformer och lärare?

   ★ ta reda på behovet av utvecklingsarbete kring undervisningen med avseende på övergången mellan grundskola och gymnasieskola?

   ★ planera, genomföra och följa upp ett sådant utvecklingsarbete?

   ★ ta reda på lärares kompetensutvecklingsbehov?

   ★ planera, genomföra och följa upp lärares kompetensutveckling?

TILL REKTORER OCH SKOLCHEFER

HANDLING

Utifrån erfarenheten av att läsa och samtala om rapporten:

1. **Är det något ni skulle vilja pröva och följa upp i er verksamhet nästa vecka? Starten eller slutet av detta eller nästa läsår? Under detta läsår?**

2. **Är det något ni skulle vilja läsa mer om?**

3. **Vad skulle ni vilja fortsätta diskutera**

    - ★ med varandra vid nästa träff?
    - ★ en grupp grundskolelärare eller gymnasielärare? En blandning?
    - ★ rektorer eller någon vid förvaltningen?
    - ★ forskare?

4. **Avsluta med att göra en plan för nästa steg både när det gäller er verksamhet, läsning och framtida samtal.**

MALL FÖR STRUKTURERAT SAMTAL

REDOVISNING

Diskussionen sammanfattas i fem punkter och delges till gruppen efteråt.

FORMER FÖR SAMTALET

Rollerna fördelas. *Samtalsledare* blir den som fyller år närmast 1 april. *Tidtagare*, den som fyller år närmast 1 maj. *Sekreterare*, den som fyller år närmast 1 juni.

Samtalet börjar och avslutas med en så kallad *runda*. En runda innebär att ordet går runt bordet, och alla får möjlighet att få tala utan att bli avbruten. Det är samtalsledarens ansvar att vid behov lägga in rundor, till exempel mitt i diskussionen när något intressant har berättats.

1. Starta med en kort presentationsrunda.
2. Under två minuter skriv ner era tankar efter att ha läst rapporten.
3. Samtalsledaren startar samtalet genom att först ge ordet till en deltagare som under två minuter får dela med sig av sina tankar. Därefter leder samtalsledaren en runda där alla får ställa frågor till den som har ordet. Därefter går ordet vidare till nästa deltagare och proceduren upprepas så att alla till slut har fått tala två minuter och fått frågor ställda till sig.
4. Därefter väljer ni ur det som sagts, vad ni vill fortsätta diskutera.
5. Fri diskussion som leds av samtalsledaren.
6. Tidtagaren avbryter diskussionen i lagom tid inför diskussionspassets slut.
7. Sekreterarna läser upp en sammanfattning av vad som sagts i fem punkter.
8. En avslutande runda, två minuter var, där synpunkter på sammanfattningen framförs.
9. Sekreteraren justerar sammanfattningen och skickar den till gruppens deltagare.

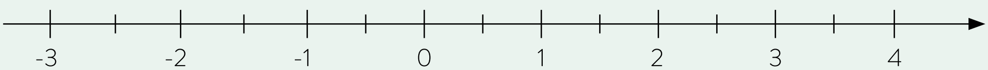
DE FJORTON UPPGIFTERNA

Uppgift 1. Ett av följande tal är större än 7/13. Vilket är talet?

$\frac{7}{15}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{6}{11}$

Lösningsfrekvens: 68–72 %. Genomsnitt 71 %. Max 1 poäng.

Uppgift 2. Placera ut talen √5 och π på tallinjen



Lösningsfrekvens: 24–30%. Genomsnitt 27 %. Max 2 poäng.

Uppgift 3. Bestäm en gemensam nämnare till 3/10 och 1/4

Lösningsfrekvensen har förbättrats successivt från 39 % 2011 till 52 % 2016.
Genomsnitt 44 %. Max 1 poäng.

Uppgift 4. Beräkna och förkorta resultatet så långt som möjligt

a) $6 \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}$ c) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

Lösningsfrekvens: 4a 38–44 %, 4b 15–22 %, 4c 30–40 %. Max 1 poäng/uppgift. Lösningsfrekvensen har ökat från 2011 till 2016 för alla tre deluppgifterna, t.ex. för 4b från 15 % till 22 %.

Uppgift 5. Lös ekvationen $4x + 5 = 21$

Lösningsfrekvens: 84–86 %. Genomsnitt 85 %. Max 1 poäng.

Uppgift 6. Vilket av följande x-värden är en lösning till ekvationen $77 + 4x = 65$? Ringa in ditt svar.

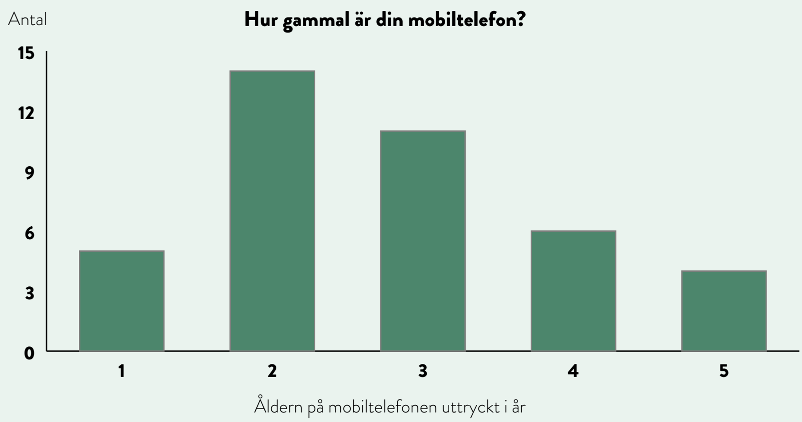
$x = 3$ $x = 5$ $x = -3$ $x = -5$

Lösningsfrekvens: 76–77 %. Genomsnitt 77 %. Max 1 poäng.

Uppgift 7. Lös ekvationen $7x - 5 = x + 4x - 5$

Lösningsfrekvens: 30–35%. Genomsnitt 33 %. Max 1 poäng. Förbättrats från 30 % till 35 % 2015–2016.

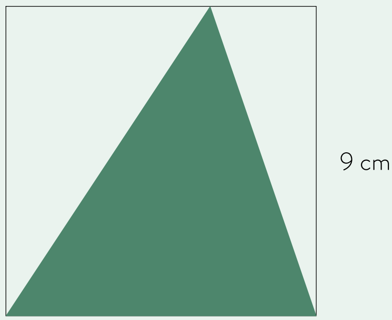
Uppgift 8. Diagrammet visar hur gamla telefoner några lärare på en skola har



a. Vilken är medianåldern för mobiltelefonerna i undersökningen?
b. Hur beräknar man medelåldern för mobiltelefonerna? Du behöver inte beräkna medelåldern, du behöver endast beskriva hur du skulle beräkna det.

Lösningsfrekvens: 8a 50–54 %. Genomsnitt 53 %. 8b 44–51 %. Genomsnitt 48 %. Max 1 poäng/deluppgift.

Uppgift 9. I en kvadrat har vi ritat en triangel, enligt figuren.
Beräkna den skuggade triangelns area utan att mäta i figuren.



Lösningsfrekvens: 62–64 %. Genomsnitt 63 %. Max 1 poäng.

Uppgift 10. I figuren visas en rätvinklig triangel. Hur stor är vinkeln *v*?

Lösningsfrekvens: 47–51 %. Genomsnitt 50 %. Max 1 poäng.

Uppgift 11. En sida i en rektangel är $3a$ och rektangels area är $21a^2$.
Skriv ett uttryck för rektangelns omkrets.

Lösningsfrekvens: 22–26 %. Genomsnitt 24 %. Max 1 poäng.

Uppgift 12. Kalle åker bil. När han åkt 3 timmar har han kommit 240 km.
Hur långt kommer han på 3,5 timmar om han åker lika fort? Visa dina beräkningar.

Lösningsfrekvens: 72–73 %. Genomsnitt 73 %. Max 2 poäng.

Uppgift 13. Vera springer 3 kilometer på 18 minuter. Vilken är hennes medelfart uttryckt i km/h? Visa dina beräkningar.

Lösningsfrekvens: 31–35 %. Genomsnitt 33 %. Max 2 poäng.

Uppgift 14. Sofia är på stranden och badar. Hon köper en hamburgare för en tredjedel av sina pengar och sedan köper hon glass för 30 kr. Efter det har hon hälften av sina pengar kvar. Hur många kronor tog Sofia med sig?

Lösningsfrekvens: 21–24 %. Genomsnitt 22 %. Max 3 poäng.

MER FORSKNING ATT LÄSA

TAL OCH ARITMETIK

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal, 16*(2), 69–86. doi:10.1007/BF03217396

Keijzer, R., & Terwel, J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 53–73. doi:10.1023/A:1017971912662

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8, 44.

McIntosh, A., Nohda, N., Reys, B., & Reys, R. (1995). Mental computation performance in Australia, Japan and the United States. *Educational Studies in Mathematics*, 29(3), 237–258.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*(1), 3–17. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61–70.

ALGEBRA

Capraro, M, & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology, 27*(2–3), 147–164.

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 232–236.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312.

Nogueira de Lima, R., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 3–18.

Pirie, S., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 159–181.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 341–359.

STATISTIK

Groth, R. E., & Bergner, J. A. (2006). Preservice Elementary Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Mean, Median, and Mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(1), 37–63.

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The Development of Children's Concepts of the Arithmetic Average. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 64–80.

SAMBAND MELLAN BEGREPPSFÖRSTÅELSE OCH PROCEDURFÖRMÅGA

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An Alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. Journal for *Research in Mathematics Education, 38*(2), 115–131. doi:10.2307/30034952

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual Knowledge Falls through the Cracks: Complexities of Learning to Teach Mathematics for Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 8–40.

Li, Y., & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers’ knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: the case of fraction division. *ZDM, 40*(5), 845–859. doi:10.1007?s11858-008-0134=8

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346–362.

RESONEMANGSFÖRMÅGA

Ahl, L. M. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish mathematics textbooks. *2016, 5*(2), 180–204.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55–66.

English, L. D., & Sharry, P. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational Studies in Mathematics, 30*(2), 135–157.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and

Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524–549.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 115–139. Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 83–95.

Johansson, H. (2016). Mathematical Reasoning Requirements in Swedish National Physics Tests. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(6), 1133–1152.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165–190. doi:10.1023/a:1003956417456

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29–55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 72*(3), 271–288.

ÖVERGÅNGEN MELLAN SKOLFORMER

Jackson, M., Erikson, R., Goldthorpe, J., & Yaish, M. (2007). Primary and secondary effects in class differentials in educational attainment: the transition to a-level courses in England and Wales. *Acta Sociologica, 50*(3), 211–229. doi:10.1177/0001699307080926

Larson, N. (2014). *Matematikämnet och stadiebytet mellan grundskolan och gymnasieskolan: en enkät- och klassrumsstudie* (Doktorsavhandling, Linköpings universitet). Linköping: Linköpings universitet.

Pietarinen, J., Pyhältö, K., & Soini, T. (2010). A horizontal approach to school transitions: a lesson learned from Finnish 15-year-olds. *Cambridge Journal of Education, 40*(3), 229–245. doi:10.1080/0305764X.2010.506145

Sdrolias, K., & Triandafillidis, T. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"? *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 159–169. doi:10.1007/s10649-007-9093-1

REFERENSER

Arcavi, A., & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. *ZDM, 39*(5), 355–364.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84* (2), 191–215.

Carlson, M., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1), 45–75.

Clarke, D. & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education, 18*, 947–967.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175–190.

Cooper, H., Nye, B., Charlton, K., Lindsay, J., & Greathouse, S. (1996). The effects of summer vacation on achievement test scores: A narrative and metaanalytic review. *Review of Educational Research, 66*, 227–268.

Hattie, J. A. C. (2008). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* London New York, Routledge.

Häggström, J. (1994). Tidigare Algebra. *Nämnaren 4*, 17–22.

Jahnke, A. (2014). *Insegel till dialog. Skolans matematikutbildning – en studie i fyra praktiker* (Doktorsavhandling. Nord Universitetet). Bodø: Nord Universitetet.

Jahnke, A. (2015). Hur högt kan ett lyft ta oss?, *Pedagogiska Magasinet, 3*.

Jahnke, A. (2016). *Skolans och förskolans matematik – kunskapssyn och praktik*. Lund: Studentlitteratur.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers.* (Doktorsavhandling, Göteborgs universitet). Göteborg: Göteborgs universitet.

Kilborn, W. (2014). *Om tal i bråk- och decimalform – en röd tråd.* Göteborg: Nationellt Centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Kilborn, W., & Karlsson, N. (2013). När kan elever börja räkna med kvadratrötter? *Nämnaren, 1,* 11–14.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Kücheman, D. E. (1981). *The Understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school children*. London: University of London.

Lauvås, P., Lycke, K.H. & Handal, G. (1997). *Kollegahandledning i skolan*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM), Göteborgs universitet.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2009). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. & Højgaard-Jensen, T. (2002). *Kompetencer och matematiklæring.* Köpenhamn: Undervisningsministeriet.

Olteanu, C. (2016). Matematiskt resonemang och kritiska aspekter. *Matematiklyftet. Modul: Algebra, del 2.* Hämtad 2017-01-11 från http://larportalen.skolverket.se.

Pólya, G. (1948). *How to solve it; a new aspect of mathematical method.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Ramböll. (2016). Slututvärdering. Utvärderingen av Matematiklyftet. 2013–2016. Hämtad 2017-01-19 från http://www.skolverket.se/publikationer?id=3705.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2015). *Motivation och lärande.* Stockholm: Natur & Kultur.

Skolverket (2010). *Läroplan för förskolan. Reviderad 2010.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012a). *Frisläppta uppgifter matematik PISA 21012.* Hämtad 2017-01-12 från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.254410!/Matematikuppgifter_2012.pdf.

Skolverket. (2012b). TIMSS 2011. *Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016a). *Bilaga 3: Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. Skolverkets förslag till förändringar – Nationella it-strategier (U2015/04666/S) Dnr 6.1.1-2015:1608.* Hämtad 2017-01-11 http://www.skolverket.se/publikationer?id=3668ö.

Skolverket. (2016b). *PISA 2015 15-åringars kunskaper i naturvetenskap, läsförståelse och matematik.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016c). *TIMSS 2015. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016d). *Slutredovisning: Uppdrag att svara för utbildning.* Stockholm: Skolverket.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151–165.

Stockholms stads utbildningsförvaltning. (2012). *Utvärdering av det diagnostiska provet i matematik för gymnasieskolan ht 2012.* Stockholm: Stockholms stads utbildningsförvaltning.

Stockholms stads utbildningsförvaltning. (2013). *Utvärdering av det diagnostiska provet i matematik för gymnasieskolan ht 2013.* Stockholm: Stockholms stads utbildningsförvaltning

Stockholms stads utbildningsförvaltning. (2014). *Utvärdering av det diagnostiska provet i matematik för gymnasieskolan ht 2014.* Stockholm: Stockholms stads utbildningsförvaltning.

Stockholms stads utbildningsförvaltning. (2015). *Utvärdering av det diagnostiska provet i matematik för gymnasieskolan ht 2015.* Stockholm: Stockholms stads utbildningsförvaltning.

Stockholms stads utbildningsförvaltning. (2016a). *Utvärdering av det diagnostiska provet i matematik för gymnasieskolan ht 2016.* Stockholm: Stockholms stads utbildningsförvaltning.

Stockholms stads utbildningsförvaltning. (2016b). *Slututvärdering. Stockholmslyftet i matematik 2013–2016.* Stockholm: Stockholms stads utbildningsförvaltning.

Szabo, A. (2015). Mathematical problem-solving by high achieving students: Interaction of mathematical abilities and the role of the mathematical memory. I Krainer, K. & Vondrová, N. (red.), *Proceedings of CERME9* (s. 1087–1093). Prag: Charles University, ERME.

Tengstrand, A. (2005). Åtta kapitel om geometri. Lund: Studentlitteratur.

van Bommel, J. (2012). Att få de rätta felsvaren. *Nämnaren, 3*, 13–16.

Österholm, M., Bergqvist, T., Liljekvist, Y., & van Bommel, J. (2016). Utvärdering av Matematiklyftets resultat. Slutrapport. Hämtad 2017-01-19 från http://www.skolverket.se/publikationer?id=3706.

Öystein, H. P. (2011). What characterizes high achieving students´ mathematical reasoning? I Sriraman, B. & Lee, K. H. (red.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics*, (s. 193–216). Rotterdam: Sense Publishers.

SYFTET MED IFOUS FOKUSERAR

Inom organisationsforskning beskrivs utvecklingsarbete som en pendelrörelse mellan å ena sidan den dagliga driften av verksamheten och å andra sidan utvecklingen och förbättringen av verksamheten (Ellström, 2005). I den dagliga driften behöver verksamheten fortgå och fungera effektivt och med god kvalitet. Lärare, skolpersonal, rektorer, ledare och personal på huvudmannanivå och kommunalpolitiker utför sina respektive handlingar i sina praktiker. Vi utvecklar därmed en praktisk kunskap och ett omdöme som används dagligen i de situationer vi möter och de beslut vi tar. Denna typ av kunskap är ofta omedveten och tyst. Den kan vara av hög kvalitet, men för att inte förtrogenheten ska övergå i att vi blir *för* trogna behöver den kontinuerligt utmanas och ”störas”.

Det som kan fungera som ”störning” och som gör att vi går från ett rutinmässigt till ett reflekterande handlande är till exempel ny information om kunskapsläget inom ett för den professionelle relevant område. Ifous *fokuserar* syftar till att stödja ett sådant arbete. Ifous *fokuserar* är en analysfunktion som ska leverera konkret, saklig och användbar information om kunskapsläget inom ett visst område med relevans för huvudmännens utveckling av verksamheten. Det Ifous *fokuserar* levererar kan användas för att hålla pendeln i rörelse mellan drift och utveckling så att omdömet och beslutsförmågan utvecklas på olika nivåer i skolhuvudmannens verksamhet.

De kunskapsområden som kommer vara föremål för analys kommer att vara smala – fokuserade – och riktade mot en viss målgrupp inom skolhuvudmannens verksamhet där ett behov har uttryckts. Arbetet kommer att baseras på att analysera befintliga data insamlade av skolhuvudmän eller nationellt/internationellt. Alternativt kan analysarbete vara en översikt av forskningsbaserad litteratur inom ett begränsat kunskapsområde.

Ifous *fokuserar* resulterar i en kortfattad rapport som inkluderar hur texten kan användas lokalt t.ex. genom diskussionsfrågor till den berörda målgruppen. I rapporten kommer funna resultat även relateras till andra nivåer och yrkesverksamma inom skolhuvudmannens verksamhet än den huvudsakliga målgruppen. Till rapporten finns även en powerpoint att använda lokalt och en kort film. Rapporten presenteras på ett öppet seminarium samt på interna seminarier för medverkande huvudmän.

Ifous – Innovation, Forskning och Utveckling i Skola och förskola är ett fristående forskningsinstitut som verkar för att skapa nytta för svensk skola och förskola. Vi gör det genom att stödja praktiknära forskning och konkret utvecklingsarbete där lärare och skolledare tar aktiv del i kunskapsbyggandet. Särskilt fokus läggs på utvecklingsområden som har stor betydelse för lärandet. Ifous vänder sig främst till skolhuvudmän samt organisationer med ett tydligt skolfokus, och drivs non-profit.

Ifous fokuserar är en analysfunktion som levererar konkret, saklig och användbar information om kunskapsläget inom ett avgränsat område med relevans för skolhuvudmännens ledning och utveckling av verksamheten. Syftet är stimulera till samtal och handling kring drift och utveckling i huvudmannens verksamhet och ge underlag för välgrundade beslut. Arbetet utförs på uppdrag av skolhuvudmän och utgår från tillgänglig statistik, forsknings- och granskningsresultat som fördjupas och sammanställs i en kort rapport. Målgruppen kan variera utifrån fokusområde men funna resultat relateras alltid till alla nivåer i huvudmannens verksamhet.

ifous

i samarbete med

AcadeMedia Helsingborg Kunskapsskolan Nacka kommun Stockholms stad